ATMOC – Séance du 16 décembre **Thibaut Giraud**

LOGIQUE ET CONTINGENCE

I – The Simplest Quantified Modal Logic

1) Langage

On part d'un langage **L** défini comme un langage de la logique classique du premier ordre avec seulement cette clause additionnelle :

Si φ est une formule de **L** alors □φ est une formule de **L**

(Et l'on définit de la façon habituelle ◊φ comme ~□~φ.)

2) Sémantique de SQML

Une interprétation **I** de **L** est un quadruplet <**W**, w_0, **D**, **V**> qui satisfait les conditions suivantes :

W est un ensemble non vide. Intuitivement, c'est l'ensemble des mondes possibles.

w_0 est un membre distingué de **W**, le "monde actuel" de l'interprétation.

D est un ensemble non vide, l'ensemble des individus.

V est une fonction qui assigne des valeurs sémantiques aux constantes individuelles et aux prédicats de **L** : (1) à chaque constante individuelle de **L**, **V** associe un élément de **D** ; (2) à chaque prédicat *n*-aire, **V** associe une fonction qui associe à chaque élément de **W** une classe de *n*-uplets d'individus (autrement dit, **V** associe à chaque prédicat une fonction qui pour chaque monde possible *w* donne l'extension du prédicat dans *w*).

A partir de là, étant donné une interprétation **I** d'un langage modal **L** on peut définir la notion de vérité$_{\mathbf{I}}$ dans un monde grâce aux règles suivantes :

Une formule atomique $P^n(a_1, \ldots, a_n)$ est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans *w* ssi $(a_1, \ldots, a_n)$ appartient à l'extension de P^n dans *w*.

Une formule quantifiée $\forall x\varphi$ est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans *w* ssi pour tout individu *a* dans **D,** la formule $\varphi(x/a)$ est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans *w*. (Pour le dire plus simplement : $\forall x\varphi$ est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans *w* ssi tous les individus satisfont φ dans *w*.)

Une formule modale □φ est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans *w* ssi elle est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans tous les mondes. (On ne se soucie pas de l'accessibilité.)

Les autres règles sont formulées de la façon habituelle.

Une formule est vraie$_{\mathbf{I}}$ si elle est vraie$_{\mathbf{I}}$ dans le monde actuel w_0.

Une formule est valide ou logiquement vraie ssi elle est vraie$_{\mathbf{I}}$ pour n'importe quelle interprétation **I** de **L**.

Un ensemble de formules Γ implique φ ssi pour toute interprétation **I** φ est vraie$_{\mathbf{I}}$ si tous les membres de Γ sont vraies$_{\mathbf{I}}$.

(En somme, cette sémantique fonctionne globalement de la même façon que la sémantique de la logique classique du premier ordre aux différences près que 1) le modèle contient des mondes et définit d'abord une notion de vérité *dans un monde*, et 2) l'extension des prédicats est relativisée aux mondes et varie de monde en monde. Mais on peut dire que c'est la façon la plus directe et la plus simple de donner une interprétation d'un langage modale quantifiée.)

3) Axiomatique de SQML

L'axiomatique de SQML combine la logique propositionnelle classique, la logique classique du premier ordre avec identité, et les axiomes modaux suivants :

K : $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

T : $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

5 : $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Et la règle de nécessitation : si φ est un théorème, $\Box\varphi$ est un théorème

Cette axiomatique est cohérente est complète : une formule φ est dérivable dans cette axiomatique ssi φ est valide dans SQML.

Quelques théorèmes intéressants :

BF : $\forall x\Box\varphi \rightarrow \Box\forall x\varphi$

$\Diamond\exists x\varphi \rightarrow \exists x\Diamond\varphi$

CBF : $\Box\forall x\varphi \rightarrow \forall x\Box\varphi$

NE : $\forall x\Box\exists y(y=x)$

II – Des conséquences controversées

Le problème général que pose SQML tient au fait qu'il y a un domaine constant d'objets de monde en monde. $\forall xFx$ est vraie dans un monde ssi tous les objets sont F dans ce monde. Donc quel que soit le monde considéré, le quantificateur porte sur le même domaine d'objets.

C'est ce qu'exprime la formule de Barcan : $\Diamond\exists x\varphi \rightarrow \exists x\Diamond\varphi$. Si je dis que *dans un monde possible il existe quelque chose qui est une licorne*, cela implique qu'*il existe (dans le monde actuel) quelque chose qui dans un monde possible est une licorne*. Les objets existant dans des mondes possibles doivent exister aussi dans le monde actuel.

SQML pose donc des problèmes pour penser la contingence de l'existence des objets si l'on estime que la quantification est chargée existentiellement, autrement dit si l'on accepte la définition suivante de l'existence :

x existe $=_{\text{df}}$ $\exists y\ (y = x)$

Selon cette définition, le théorème NE : $\forall x\Box\exists y(y=x)$ signifie précisément : *pour tout x nécessairement x existe*. C'est en contradiction avec l'idée qu'il y a des objets dont l'existence est contingente, des objets qui pourraient ne pas exister.

Le problème vient (1) de la définition de l'existence comme appartenance au domaine de quantification, et (2) du fait que le domaine de quantification ne varie pas de monde en monde.

Pour résoudre ce problème, on peut ou bien renoncer à (1) en définissant l'existence d'une autre façon, de sorte que BF et NE n'entrent pas en contradiction avec l'idée de contingence, et l'on peut alors conserver SQML ; ou bien on peut renoncer à (2), de sorte à ce que BF et NE ne soient plus des théorèmes, cela exige de modifier SQML.

III – Les objets contingemment non-concrets de Zalta

On introduit un prédicat $E!$ qui signifie être existant, ou être concret. Donc on refuse la définition précédente de l'existence en terme de quantification. On a simplement :

x existe $=_{\text{df}}$ $E!x$

Le domaine de quantification est le même pour tous les mondes possibles (on garde SQML), mais ce qui varie de monde en monde c'est l'extension de la propriété $E!$.

Pour dire que tout ce qui existe (dans le monde actuel) est matériel il ne faut pas écrire : $\forall x\, Mx$, mais il faut écrire : $\forall x\, E!x \rightarrow Mx$.

On peut formuler sans contradiction qu'un objet existe et peut ne pas exister (ou qu'un objet est concret et peut ne pas être concret) :

$\exists x\, E!x\ \&\ \Diamond{\sim}E!x$

Il est clair que NE ne signifie plus que tous les objets existent (sont concrets) mais seulement que tous les objets appartiennent au domaine de quantification (autrement dit : tous les objets sont des objets).

BF signifie ceci : *si dans un monde possible un objet est une licorne (concrète), alors il y a dans le monde actuel un objet (non-concret) qui est possiblement une licorne.* La licorne possible est bien un objet de notre monde, mais cet objet n'existe pas : c'est un objet contingemment non-concret.

On peut dire que c'est une solution actualiste dans la mesure où tous les objets sont bien actuels. Le domaine de quantification contient trois type d'objets : il y a les objets actuellement concrets d'une part, et d'autre part les objets non-concrets parmi lesquels il y a les objets proprement abstraits (nécessairement non-concrets) et les objets possibles (contingemment non-concrets, concrets dans au moins un autre monde possible).

IV – Modèle de Kripke

L'idée générale est de modifier la sémantique de SQML en substituant au domaine unique **D** une fonction **dom** qui associe à chaque monde w un ensemble (intuitivement l'ensemble des individus existant dans ce monde). Une formule quantifiée $\forall x\varphi$ est vraie dans w ssi elle est vraie de tous les individus qui appartiennent à **dom**(w). Ainsi, le domaine sur lequel on quantifie varie de monde en monde.

BF, CBF et NE de façon évidente ne sont pas valides dans un modèle de Kripke. Or ce sont des théorèmes dans l'axiomatique de SQML qui n'est donc plus cohérente. Il faut la modifier afin de bloquer ces dérivations.

La solution de Kripke consiste à n'admettre que des formules closes et à bannir l'usage de constantes. (Si on admet des formules ouvertes ou l'usage de constantes on peut facilement dériver CBF et NE.)

Une autre solution (adoptée par Fine et Salmon) consiste à adopter une logique libre, c'est-à-dire une logique où des constantes individuelles peuvent ne pas dénoter d'objets. La règle d'instanciation (de $\vdash\forall x\phi x$ suit $\vdash\phi a$ pour n'importe quelle constante a) et la règle de généralisation (de $\vdash\phi x$ suit $\vdash\forall x\phi x$) ne sont plus applicables, ce qui bloque les dérivations des formules de Barcan.

La solution de Deutsch est un peu plus complexe. L'interprétation des variables et des constantes est relativisée au monde d'origine (au monde où l'énonciation est faite). Pour évaluer un énoncé Fa, il faut une paire de monde $\langle w, w'\rangle$ où w est le monde d'origine et w' le monde dans lequel on veut évaluer Fa. Fa sera vrai pour $\langle w, w'\rangle$ si le terme a dénote un objet dans w et si cet objet est dans l'extension de F dans w'.

La formule $\Diamond{\sim}\exists x\, x{=}Gorbatchev$ est ainsi vraie *du point de vue du monde actuel* s'il y a un monde possible w où Gorbatchev n'existe pas. Mais *du point de vue du monde w où Gorbatchev n'existe pas*, la formule ${\sim}\exists x\, x{=}Gorbatchev$ est fausse.

La logique qui en résulte limite la règle de nécessitation ce qui permet de bloquer la dérivation des formules de Barcan.

V – Solution de Prior

La notion centrale est celle d'*énonçabilité*. Admettons d'abord que [φ] est la proposition exprimée par un énoncé φ et que φ est vrai dans un monde seulement si [φ] est vrai. L'idée de Prior c'est que l'énoncé φ qui exprime une proposition singulière [φ] à propos d'un individu contingent *a* n'est pas énonçable (donc ni vrai ni faux) dans les mondes où *a* n'existe pas (cela n'empêche pas la proposition d'être vraie ou fausse).

Un énoncé est donc nécessairement énonçable seulement si tous les individus auxquels il se réfère existent nécessairement. Prior exprime l'énonçabilité nécessaire au moyen de l'opérateur *S* : la formule *S*φ signifie que φ est nécessairement énonçable.

De là Prior s'attaque à l'interdéfinition du possible et du nécessaire. Supposons que φ exprime une proposition singulière [φ] concernant un individu contingent *a*. S'il n'y a pas de monde possible où [~φ] est vrai, il n'y a pas non plus de monde possible où l'énoncé ~φ est vrai, et on a donc ~◊~φ. Mais il n'en suit pas que φ est *nécessairement* vrai car pour être vrai dans tous les mondes il faudrait que φ soit énonçable dans tous les mondes, et donc que *a* existe nécessairement, or *a* est par hypothèse contingent. Donc de ~◊~φ on ne peut pas déduire □φ. A la place on a :

$\Box\varphi \leftrightarrow (S\varphi \wedge \sim\Diamond\sim\varphi)$

Une conséquence de cette approche c'est que de nombreuses lois logiques ne sont pas nécessaires. Dans aucun monde possible la proposition [$Fa \rightarrow Fa$] n'est fausse et donc l'énoncé $Fa \rightarrow Fa$ n'est faux dans aucun monde possible ; mais cela n'implique pas que cet énoncé soit nécessaire, car il faudrait pour cela que *a* existe nécessairement. Ainsi, si φ est une vérité logique, ~◊~φ en est une aussi, mais pas forcément □φ.

On a donc une règle de nécessitation affaiblie :

Si $\vdash\varphi$, alors $\vdash\sim\Diamond\sim\varphi$

Avec ces restrictions ni BF, ni CBF ni NE ne sont dérivables. Cependant on peut dériver la formule suivante qui semble exprimer à peu près la même chose que NE :

$\forall x \sim\Diamond\sim\exists y\, y=x$

Prior défend que cette formule signifie seulement qu'aucune proposition à propos de *a* n'est énonçable dans un monde où *a* n'existe pas (pas même celle qui affirme que *a* n'existe pas).

Deutsch, H., 1990, "Contingency and Modal Logic," *Philosophical Studies*, 60: 89–102.

Fine, K., 1978, "Model Theory for Modal Logics: Part I — The *De Re*/*De Dicto* Distinction," *Journal of Philosophical Logic*, 7: 125–56.

Kripke, S., 1963, "Semantical Considerations on Modal Logic," *Acta Philosophica Fennica*, 16: 83–94.

Linsky, B., and Zalta, E., 1994, "In Defense of the Simplest Quantified Modal Logic," *Philosophical Perspectives 8: Logic and Language*, J. Tomberlin (ed.), Atascadero: Ridgeview, 431–458.

Menzel, Christopher, "Actualism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.),
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/actualism/>.

Prior, A., 1956, "Modality and Quantification in S5," *Journal of Symbolic Logic*, 21: 60–2.
1957, *Time and Modality*, Oxford: Clarendon